

MAI 1 cvičení

Limita funkce.

1. Z definice limity ukažte:

a) $\lim_{x \rightarrow 2} (3x - 2) = 4$; b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0$; c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$; d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$.

2. Nechť funkce f je neklesající a omezená v intervalu (a, b) . Dokažte, že pak pro libovolné $c \in (a, b)$ existují vlastní limity $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x)$ a $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x)$; co lze říci o oboustranné limitě $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$?

3. Ukažte, že platí:

(i) $\lim_{x \rightarrow c} |f(x)| = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow c} f(x) = 0$

(ii) Je-li $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = 0$ a funkce $g(x)$ je omezená v nějakém prstencovém okolí bodu c , pak i $\lim_{x \rightarrow c} f(x)g(x) = 0$.

4. Vypočítejte limity, nebo ukažte, že neexistují:

a) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{-1}{(x+3)^2}$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{(x+3)^2}$; $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2+1}{x^2-1}$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2+1}{x^2-1}$; $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2+3x+2}{1-x^2}$; $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+4x-5}{(x-1)^2}$;
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{3-x^2}$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3}{3-x^2}$;

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1}-x}{x}$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}}{x}$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$;
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+2}-\sqrt{x})$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+x+1}-x)$;

c) (limita složené funkce) $\lim_{x \rightarrow 3} \exp\left(\frac{1}{3-x}\right)$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp\left(\frac{1}{3-x}\right)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \exp\left(\frac{1}{x}\right)$; $\lim_{x \rightarrow ?} \exp\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$;
 $\lim_{x \rightarrow ?} \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$;

d) Víme-li, že $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, spočítejte limity (nebo ukažte, že neexistují):

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x}$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x}$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2}$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x}$; $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin \sqrt{x}}{x}$; $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{\sin(x+1)}$; $\lim_{x \rightarrow 0} \ln\left(\frac{x}{\sin x}\right)$;

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x}$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sin x}{x - \cos x}$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$; $\lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin x$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(2 + \sin x)$;
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \cos x)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} \sin x$.

f) Víme-li, že $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$, spočítejte limity, nebo ukažte, že neexistují (limita složené funkce):

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log x}{x-1}$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x}$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(\cos x)}{x}$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin 2x}$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{\cos x - 1}$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x^2)}{\log(1-x^2)}$;

$\lim_{x \rightarrow \infty} x(e^{\frac{1}{x}} - 1)$; $\lim_{x \rightarrow \infty} x(2^{\frac{1}{x}} - 1)$; $\lim_{x \rightarrow \infty} x \log\left(1 - \frac{2}{x}\right)$.

g) Definujme $f(x)^{g(x)} = \exp(g(x) \cdot \log f(x))$. Spočítejte $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$; $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x$.

5. Definujte a vyšetřete vlastnosti funkce inverzní k funkci

a) $\sin x$ na intervalu $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ (fce $\arcsin x$);

b) $\operatorname{tg} x$ na intervalu $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ (fce $\operatorname{arctg} x$).

6. Limity s cyklotrickými funkcemi $\arcsin x$, $\operatorname{arctg} x$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2 - x}; \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2 - x};$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2 - x}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right); \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \arcsin\left(\sqrt{x^2 + x} - x\right); \quad \lim_{x \rightarrow ?} \operatorname{arctg}\left(\frac{1-x}{1+x}\right).$$

7. Vyšetřete, zda lze v bodě $a = 0$ spojitě dodefinovat (a lze-li, tak dodefinujte) funkci f , která je pro $x \neq 0$ dána předpisem

(i) $f(x) = x \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$; (ii) $f(x) = \frac{\ln(4x^2 + 1)}{x^2}$; (iii) $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$.

Výpočet derivace funkce .

Určete definiční obory a obory, kde existují derivace následujících funkcí a tyto derivace vypočítejte :

$$f(x) =: \frac{1}{x} + 4x^2; \quad \sqrt[3]{x^2} - \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt[5]{x}}; \quad x + \sin x; \quad x^2 \sin x; \quad x \ln(x-3); \quad \frac{x^2+1}{x^2-1}; \quad \frac{x^3}{x^2-1}; \quad \frac{2}{(x^3-2)^2};$$

$$x - 2 \operatorname{arctg} x;$$

$$\sqrt{\frac{x-3}{x+2}}; \quad \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2; \quad \sqrt{1+\sin 4x}; \quad \cos \sqrt{x}; \quad x^2 e^{-x}; \quad e^{\frac{1}{x}} - x; \quad \exp\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right); \quad \frac{e^{-x}}{2-x}; \quad \sqrt{x} \operatorname{arctg} \sqrt{x};$$

$$x^2 \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right);$$

$$x^3 \ln(\operatorname{arctg} 2x); \quad e^{-3x^2} \cos(\ln 2x); \quad \sqrt{x^2+1} \operatorname{arctg}(\sin 2x); \quad \operatorname{arctg}\left(\frac{1-x}{1+x}\right); \quad \left(1 + \frac{3}{x}\right)^x;$$

$$\arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right); \quad |\operatorname{arctg} x|; \quad |\operatorname{arctg}^3 x|.$$